

§4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT THEO $\sin U$, $\cos U$

A. GIÁO KHOA

Phương trình dạng: $A\sin U + B\cos U = C \quad (1)$

Trong đó: U : Biểu thức chứa ẩn

A, B, C : Các hệ số

$A \neq 0, B \neq 0$

Phương pháp: Chia 2 vế của (1) cho $\sqrt{A^2 + B^2}$, ta được:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin U + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos U = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cdot \sin U + \cos \alpha \cdot \cos U = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{với} \quad \sin \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \cos \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(U - \alpha) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{là phương trình cơ bản.}$$

Cách khác:

$$(2) \Leftrightarrow \cos \alpha \cdot \sin U + \sin \alpha \cdot \cos U = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{với} \quad \left(\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sin(U + \alpha) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{là phương trình cơ bản.}$$

Lưu ý:

- Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow A^2 + B^2 \geq C^2$
- Trường hợp $C = 0$: (1) $\Leftrightarrow \tan U = -\frac{B}{A}$
- Trường hợp $B = \pm A$: Ta sử dụng công thức sau

$$\sin U \pm \cos U = \sqrt{2} \sin\left(U \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos U \pm \sin U = \sqrt{2} \cos\left(U \mp \frac{\pi}{4}\right)$$

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sin x + \cos x = 1$

Hướng dẫn giải:

$$\cos x + \sin x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 2. Tìm nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$ của phương trình $\sin x = \cos x$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Theo đề bài $x \in [-\pi; \pi] \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{4}; x = \frac{\pi}{4}$.

Ví dụ 3. Phương trình $(\sqrt{3}-1)\sin x - (\sqrt{3}+1)\cos x + \sqrt{3}-1=0$ có các nghiệm là

A. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{9} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

D. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}-1)\sin x - (\sqrt{3}+1)\cos x + \sqrt{3}-1=0 &\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}\sin x - \frac{(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}\cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow \cos \frac{5\pi}{12} \sin x - \sin \frac{5\pi}{12} \cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{5\pi}{12} = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x - \frac{5\pi}{12} = \frac{13\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $(m+1)\sin x + \cos x = \sqrt{5}$ có nghiệm.

A. $-3 \leq m \leq 1, k \in \mathbb{Z}.$

B. $0 \leq m \leq 2.$

C. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -3 \end{cases}.$

D. $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}.$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi :

$$a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow (m+1)^2 + 1 \geq 5 \Leftrightarrow (m+1)^2 \geq 4 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -3 \end{cases}.$$

§4. PHÉP VỊ TỰ

A. GIÁO KHOA

1. Định nghĩa

Cho một điểm I cố định và một số k không đổi, $k \neq 0$. Phép vị tự tâm I tỉ số k , ký hiệu $V_{(I,k)}$, là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.

$$V_{(I,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$$

Lưu ý: $V_{(I,k)}(M) = M' \Leftrightarrow V_{\left(I, \frac{1}{k}\right)}(M') = M$

Nhận xét:

- Khi $k > 0$, M và M' nằm cùng phía đối với điểm I .
- Khi $k < 0$, M và M' nằm khác phía đối với điểm I .
- Khi $k = -1$, M và M' đối xứng nhau qua tâm I nên $V_{(I,-1)} \equiv \mathcal{D}_I$.
- Khi $k = 1 \Rightarrow M \equiv M'$ phép vị tự $V_{(O,1)}$ trở thành phép đồng nhất.

2. Tính chất

Định lí 1:

Nếu phép vị tự tỉ số k biến 2 điểm M và N lần lượt thành 2 điểm M' và N' thì

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN} \text{ và } M'N' = |k|MN$$

Định lí 2:

Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm thẳng hàng đó.

Hệ quả:

Qua phép vị tự tỉ số k :

- Đường thẳng biến thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.
- Tia biến thành tia.
- Đoạn thẳng biến thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $|k|$.
- Tam giác biến thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$.
- Đường tròn bán kính R biến thành đường tròn có bán kính là $|k|R$.
- Góc biến thành góc bằng nó.

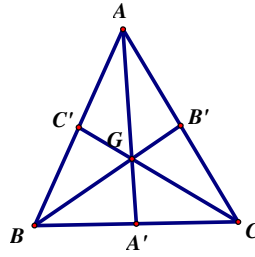
B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC với trọng tâm G . Gọi A' , B' , C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AB của tam giác ABC . Khi đó phép vị tự nào biến tam giác $A'B'C'$ thành tam giác ABC ?

- A. Phép vị tự tâm G , tỉ số 2. B. Phép vị tự tâm G , tỉ số -2 .
C. Phép vị tự tâm G , tỉ số -3 . D. Phép vị tự tâm G , tỉ số 3

Hướng dẫn giải:

Chọn B



Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$; $\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GB'}$; $\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GC'}$. Bởi vậy phép vị tự $V_{(G; -2)}$ biến tam giác $A'B'C'$ thành tam giác ABC .

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$ $B(5;4)$ $C(3;-2)$. Gọi A' , B' , C' lần lượt là ảnh của A , B , C qua phép vị tự tâm $I(1;5)$ tỉ số $k = -3$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ bằng:

- A. $3\sqrt{10}$. B. $6\sqrt{10}$. C. $2\sqrt{5}$. D. $3\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (-2; -6)$, $\overrightarrow{AB} = (4; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -4)$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow AB \perp AC$.

Vậy tam giác ABC vuông tại A nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm cạnh huyền BC và bán kính $R = \frac{BC}{2} = \sqrt{10}$.

Gọi R' là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$.

Tam giác $A'B'C'$ là ảnh của tam giác ABC qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = -3$ nên $R' = |-3|R = 3\sqrt{10}$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy . Cho phép vị tự tâm $I(2;3)$ tỉ số $k = -2$ biến điểm $M(-7;2)$ thành M' có tọa độ là

- A. $(-10;2)$. B. $(20;5)$. C. $(18;2)$. D. $(-10;5)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

$$V_{(I; -2)} : M \rightarrow M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -2\overrightarrow{IM} \Rightarrow \begin{cases} x' = -2 \cdot (-7) + (1+2) \cdot 2 = 20 \\ y' = -2 \cdot 2 + (1+2) \cdot 3 = 5 \end{cases}$$

Vậy điểm $M'(20;5)$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy . Cho đường tròn (C) có phương trình: $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 4$ và điểm $I(2;-3)$. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự V tâm I tỉ số $k = -2$. Khi đó (C') có phương trình là

- A. $(x-4)^2 + (y+19)^2 = 16$. B. $(x-6)^2 + (y+9)^2 = 16$
C. $(x+4)^2 + (y-19)^2 = 16$. D. $(x+6)^2 + (y+9)^2 = 16$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Đường tròn (C) có tâm $J(1;5)$ và bán kính $R = 2$.

$V_{(I;-2)}(J) = J'(x;y) \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ'} = -2\overrightarrow{IJ}$, với J' là tâm đường tròn (C') . Ta có:

$$\begin{cases} x_{J'} - 2 = -2 \cdot (1 - 2) \\ y_{J'} + 3 = -2(5 + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{J'} = 4 \\ y_{J'} = -19 \end{cases}.$$

Vậy đường tròn (C') có tâm $J'(4;-19)$, bán kính $R' = 2R = 4$ có phương trình là:

$$(x - 4)^2 + (y + 19)^2 = 16.$$

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x + y - 3 = 0$. Phép vị tự tâm O tỉ số $k = 2$ biến d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình sau?

A. $2x + y + 3 = 0$

B. $2x + y - 6 = 0$

C. $4x - 2y - 3 = 0$

D. $4x + 2y - 5 = 0$

Hướng dẫn giải:

Chọn B

$$V_{(O;k)}(d) = d' \Rightarrow d' : 2x + y + c = 0 \quad (1).$$

Ta có : $M(1;1) \in d$ và $V_{(O;2)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM} \Rightarrow M'(2;2) \in d' \Rightarrow 2 \cdot 2 + 2 + c = 0 \Rightarrow c = -6$.

Vậy $d' : 2x + y - 6 = 0$.